

作用素ノルムTrotter-Kato積公式の更なる展開と経路積分の問題

著者	一瀬 孝
雑誌名	平成15(2003)年度科学研究費補助金 基盤研究(B) 研究成果報告書
巻	2001-2003
ページ	16p.
発行年	2004-03-01
URL	http://hdl.handle.net/2297/48234

KAKEN
2003
3
金沢大学

作用素ノルム Trotter-Kato 積公式の更なる展開 と経路積分の問題

(課題番号 13440044)

平成13年度－平成15年度科学研究費補助金(基盤研究(B)(2))

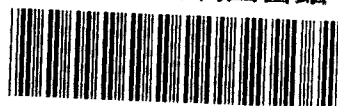
研究成果報告書

平成16年3月

研究代表者 一 瀬 孝

金沢大学附属図書館

(工学部 教授)



0400-04978-3

KAK
2003
3

作用素ノルム Trotter-Kato 積公式の更なる展開 と経路積分の問題

(課題番号 13440044)

平成13年度－平成15年度科学研究費補助金（基盤研究（B）（2））

研 究 成 果 報 告 書

平成16年3月

研究代表者 一 瀬 孝
(金沢大学理学部 教授)

はしがき

本研究の最も最初の動機は、B. Helffer (1994-5) のカツの転送作用素に関する仕事と Rogava (1993) の作用素ノルムに関する Trotter・加藤積公式に関する仕事に出逢ったことからのちょっとした驚きからであった。この3年間、本研究課題では、平成9年度－10年度に始めた研究課題「カツの転送作用素とシュレーディンガー半群との差のノルム評価に関する研究」及びそれに続く平成11年度－12年度の研究課題「カツの転送作用素及び Trotter-Kato 積公式とその周辺の問題」の両研究を更にまた発展させる成果が得られた。研究代表者・分担者の思想の根底には「シュレーディンガー作用素」という共通の水脈があり、シュレーディンガー作用素論との関連に基づき、またいつも経路積分を念頭におきつつ本研究は進められた。以下はその研究成果報告書である。

・研究組織

研究代表者： 一瀬 孝 (金沢大学理学部教授)
研究分担者： 田村 博志 (金沢大学理学部助教授)
高信 敏 (金沢大学自然科学研究科助教授)
中尾慎太郎 (金沢大学理学部教授)
藤原 大輔 (学習院大学理学部教授)
田村 英男 (岡山大学理学部教授)
谷島 賢二 (学習院大学理学部教授)
伊藤 秀一 (金沢大学理学部教授)
岩瀬 順一 (金沢大学理学部助手)
小栗栖 修 (金沢大学理学部助教授)
小俣 正朗 (金沢大学理学部助教授)
後藤 俊一 (金沢大学理学部助教授)
藤曲 哲郎 (金沢大学理学部教授)

海外研究協力者

Valentin A. Zagrebnev (CPT, CNRS, Marseille, Prof.)

・研究経費

	直接経費	間接経費
平成13年度	3200千円	0千円
平成14年度	2900千円	0千円
平成15年度	2500千円	0千円
計	8600千円	0千円

一瀬 孝 Takashi Ichinose

1. *Norm convergence of the Lie–Trotter–Kato product formula and imaginary-time path integral*,
J. Korean Math. Soc., **38** (2001), 337–348.
(Proceedings of International Conference on Feynman Integrals and Related Topics, Seoul, July 12–15, 1999)
2. (with Hideo Tamura)
The norm convergence of the Trotter–Kato product formula with error bound,
Commun. Math. Phys., **217** (2001), No.3, 489–502.
3. (with Hideo Tamura)
On the norm convergence of the Trotter–Kato product formula with error bound,
In: Partial Differential Equations and Spectral Theory (PDE 2000 Conference in Clausthal, Germany, July 24–28, 2000), edited by M. Demuth and B-W. Schulze, Operator Theory: Advances and Applications Vol. **126**, pp. 149–154, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin 2001.
4. (with Hideo Tamura, Hiroshi Tamura and Valentin A. Zagrebnov)
Note on the paper “The norm convergence of the Trotter–Kato product formula with error bound” by Ichinose and Tamura,
Commun. Math. Phys., **221** (2001), No. 3, 499–510.
5. (with Pavel Exner)
Geometrically induced spectrum in curved leaky wires,
J. Phys. A: Math. Gen., **34** (2001), 1439–1450.
6. (with Hideo Tamura)
On the norm convergence of the Trotter–Kato product formula with error bound,
数理解析研究所講究録 **1208** (2001), 128–134.
7. (with Hideo Tamura)
On the norm convergence of the selfadjoint Trotter–Kato product formula with error bound,
Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) **112** (2002), No. 1, 99–106; Special Issue on Spectral and Inverse Spectral Theory.
8. (with Brian Jefferies)
The propagator of the radial Dirac equation,
Journal of Mathematical Physics **43** (2002), No. 8, 3963–3983.
9. (with H. Neidhardt and V. A. Zagrebnov)
Operator norm convergence of Trotter–Kato product formula,
Proceedings of International Conference on Functional Analysis, Kiev, August 22–26, 2001, Ukraine Academic Press, Kiev, 2003, pp. 100–106.
10. *The Selfadjoint Lie–Trotter–Kato product formula in operator norm and time-sliced*

- approximation to imaginary-time path integral*,
to appear in the Proceedings of the International Symposium “The Mathematical Legacy of Feynman’s Path Integral Approach: Analysis, Geometry and Probability”, Lisbon/ Portugal, June 2002.
11. *Time-sliced approximation to path integral and Lie–Trotter–Kato product formula*,
In: Festschrift “A Garden of Quanta” in Honor of Hiroshi Ezawa for his seventieth birthday, pp. 77–93, World Scientific, Singapore 2003.
 12. 「経路積分—解析学の立場から」臨時別冊・数理科学『数学の未解決問題』, pp. 72–80,
サイエンス社 2003 年 1 月
 13. (with H. Neidhardt and V. A. Zagrebnov)
Trotter–Kato product formula and fractional powers of self-adjoint generators,
J. Functional Analysis **207** (2004), 33–57.
 14. (with Pavel Exner)
On product formula for quantum Zeno dynamics,
to appear in Proceedings of the XIV-th International Congress on Mathematical Physics, July 28–Aug.2, 2003, Lisbon, Portugal.
 15. (with Masato Wakayama)
Special values of the spectral zeta function of the non-commutative harmonic oscillator and confluent Heun equations,
to appear in Kyushu J. Math.

田村 博志 Hiroshi Tamura

1. (with Takashi Ichinose, Hideo Tamura and Valentin A. Zagrebnov)
Note on the paper “The norm convergence of the Trotter–Kato product formula with error bound” by Ichinose and Tamura,
Commun. Math. Phys., **221** (2001), 499–510.
2. (with Christian Gruber and Valentin A. Zagrebnov) *Berezinskiĭ–Kosterlitz–Thouless order in two-dimensional $O(2)$ -ferrofluid*,
J. Statist. Phys. **106** (2002), no. 5-6, 875–893.

高信 敏 Satoshi Takanobu

1. *On the strong-mixing property of skew product of binary transformation on 2-dimensional torus by irrational rotation*,
Tokyo J. Math. **25** (2002), No. 1, 1–15.
2. (with Hiroshi Sugita) *The probability of two integers to be co-prime, revisited — on the behavior of CLT-scaling limit*,
Osaka J. Math. **40** (2003), 945–976.
3. 極限定理から確率解析へ, 数学セミナー 43 巻 (2004), no.1, 30–33, 日本評論社.
4. *Multidimensional Brownian local times in the Malliavin calculus*,
数理解析研究所講究録 **1351** (2004 年 1 月) 「確率数値解析に於ける諸問題, VI」,

1-24.

中尾 慎太郎 Shintaro Nakao

1. *Girsanov formula in Dirichlet space theory*,
Science Reports of Kanazawa University, **46** (2001), No.1-2, 1-7.
2. *An extension of Stieltjes-Young integrals*,
Science Reports of Kanazawa University, **48** (2004), No.1-2, 1-3.
3. *A representation of continuous additive functionals of zero energy*,
Science Reports of Kanazawa University, **48** (2004), No.1-2, 5-7.

田村 英男 Hideo Tamura

1. *Norm resolvent convergence to magnetic Schrödinger operators with point interactions*,
Rev. Math. Phys. **13** (2001), No. 4, 465-511.
2. (with Hiroshi Ito)
Asymptotic behavior of scattering amplitudes in magnetic fields at large separation,
J. Math. Soc. Japan **53** (2001), No. 3, 645-668.
3. (with Hiroshi Ito)
Scattering by magnetic fields at large separation,
Publ. Res. Inst. Math. Sci. **37**(2001), No. 4, 531-578.
4. (with Hiroshi Ito)
Aharonov-Bohm effect in scattering by point-like magnetic fields at large separation,
Ann. Inst. Henri Poincaré, **2** (2001), No. 2, 309-359.
5. (with Takashi Ichinose)
The norm convergence of the Trotter-Kato product formula with error bound,
Commun. Math. Phys., **217** (2001), 489-502.
6. (with Takashi Ichinose)
On the norm convergence of the Trotter-Kato product formula with error bound,
In: Partial Differential Equations and Spectral Theory (PDE 2000 Conference in Clausthal, Germany, July 24-28, 2000), edited by M. Demuth and B-W. Schulze, Operator Theory: Advances and Applications Vol. **126**, pp. 149-154, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin 2001.
7. (with Takashi Ichinose, Hiroshi Tamura and Valentin A. Zagrebnov)
Note on the paper "The norm convergence of the Trotter-Kato product formula with error bound" by Ichinose and Tamura,
Commun. Math. Phys., **221** (2001), 499-510.
8. (with Hiroshi Ito)
Aharonov-Bohm effect in scattering by a chain of point-like magnetic fields at large separation,
Asymptotic Analysis, **34** (2003), no. 3-4, 199-240.

9. *Resolvent convergence in norm for Dirac operator with Aharonov-Bohm field*,
Journal of Mathematical Physics **44**, 2967–2993 (2003).

谷島 賢二 Kenji Yajima

1. *On the behaviour at infinity of the fundamental solution of time dependent Schrödinger equation*,
Rev. Math. Phys. **13** (2001), No. 7, 891–920.
2. (with André Martinez)
On the fundamental solution of semiclassical Schrödinger equations at resonant times,
Commun. Math. Phys. **216** (2001), no. 2, 357–373.
3. (with Zhang, Guoping)
Smoothing property for Schrödinger equations with potential superquadratic at infinity,
Commun. Math. Phys. **221** (2001), no. 3, 573–590.
4. (with Arne Jensen)
A remark on L^p -boundedness of wave operators for two-dimensional Schrödinger operators,
Commun. Math. Phys. **225** (2002), No. 3, 633–637.
5. (with G. Zhang)
Schrödinger equations with superquadratic potentials,
Contemporary Math. **307** (2002), 219–232.
6. 著書：ルベーク積分と関数解析，朝倉書店，267ページ，2002年.
7. (with A. Galtbayer and A. Jensen)
Nelson model with less than two photons,
Annales H. Poincaré **4** (2003), 239–273.
8. (with A. Galtbayer and A. Jensen)
Local time-decay of solutions to Schrödinger equations with time-periodic potentials,
to appear in J. Stat. Phys.

小栗栖 修 Osamu Ogurisu

1. (with Masao Hirokawa)
Ground state of a spin-1/2 charged particle in a two-dimensional magnetic field,
Journal of Mathematical Physics **42** (2001), No. 8, 3334–3343.
2. *Supersymmetric analysis of discrete magnetic Schrödinger operators*,
Preprint.

Valentin A. Zagrebnov

1. (with Vincent Cachia)
Operator-norm approximation of semigroups by quasi-sectorial contractions,

- J. Funct. Anal. **180** (2001), No. 1, 176–194.
2. (with Vincent Cachia and Hagen Neidhardt)
Accretive perturbations and error estimates for the Trotter product formula,
Integral Equations Operator Theory **39** (2001), No. 4, 396–412.
3. (with Takashi Ichinose, Hideo Tamura and Hiroshi Tamura)
Note on the paper: "The norm convergence of the Trotter-Kato product formula with error bound" by T. Ichinose and H. Tamura,
Commun. Math. Phys. **221** (2001), No. 3, 499–510.
4. (with Vincent Cachia)
Trotter product formula for nonself-adjoint Gibbs semigroups,
J. London Math. Soc. (2) **64** (2001), No. 2, 436–444.
5. (with Vincent Cachia)
Operator-norm convergence of the Trotter product formula for holomorphic semigroups,
J. Operator Theory **46** (2001), No. 1, 199–213.
6. (with Pavel Exner and Hagen Neidhardt)
Potential approximations to δ' : an inverse Klauder phenomenon with norm-resolvent convergence,
Commun. Math. Phys. **224** (2001), No. 3, 593–612.
7. *Topics in the Theory of Gibbs Semigroups*,
Leuven Notes in Mathematical and Theoretical Physics, **10**, Series A: Mathematical Physics, 185 pages, Leuven University Press 2003.
8. (with T. Ichinose and H. Neidhardt)
Trotter-Kato product formula and fractional powers of self-adjoint generators,
J. Functional Analysis **207** (2004), 33–57.

(2) 口頭発表

一瀬 孝 Takashi Ichinose

1. (with Hideo Tamura)
On the norm convergence of the Trotter-Kato product formula with error bound,
Workshop on Spectral and Inverse Spectral Theories of Schrödinger Operators, International Center, Goa/India (2000年12月14日)
2. On the norm convergence of the selfadjoint Trotter-Kato product formula with error bound, 「学習院大学スペクトル理論セミナー」, 学習院大学理学部数学教室 (2001年1月20日)
3. Recent results on the the selfadjoint Trotter-Kato product formula in the operator norm with error bound, Seminar in Quantum Theory in Different Contents, Czech Technical University, Prague/ Czech (2001年3月20日)

4. Recent results on the the selfadjoint Trotter–Kato product formula in the operator norm with error bound, Seminaire Physique Mathématique, Centre de Physique Théorique, CNRS-Luminy, Marseille/ France (2001 年 4 月 11 日)
5. (with H. Neidhardt and V. A. Zagrebnov)
Operator norm convergence of Trotter–Kato product formula, Ukrainian Mathematical Congress–2001: International Conference on Functional Analysis, Kiev/ Ukraine (2001 年 8 月 22–26 日)
6. On the norm convergence of the selfadjoint Lie–Trotter–Kato product formula with optimal error bound, The 7th International Conference: Path Integrals 2002 from Quarks to Galaxies, Antwerp/Belgium (2002 年 5 月 28 日)
7. On the norm convergence of the selfadjoint Lie–Trotter–Kato product formula with optimal error bound, The International Symposium “The Mathematical Legacy of Feynman’s Path Integral Approach: Analysis, Geometry and Probablity”, Lisbon/ Portugal (2002 年 6 月 25 日)
8. Recent results on the selfadjoint Trotter–Kato product formula in operator norm with open problems, Workshop on Harmonic Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations, 京都大学数理解析研究所 (2003 年 7 月 7 日).
9. On path integral for the radial Dirac equation, The Satellite “Conference on Mathematical Problems in Quantum Mechanics” to the XIV International Congress on Mathematical Physics, Lisbon, Portugal (2003 年 7 月 21 日–24 日).
10. (with Pavel Exner)
Product formula for quantum Zeno dynamics, Session: Quantum Mechanics and Spectral Theory at the XIV International Congress on Mathematical Physics, Lisbon, Portugal (2003 年 7 月 28 日–8 月 2 日).
11. Recent results on the Trotter–Kato product formula in operator norm with optimal error bound, 東北大学理学研究科数学専攻, 解析セミナー (2003 年 10 月 20 日).
12. On a product formula for quantum Zeno dynamics, at International Conference Quantum Information 2003, 国際高等研究所 (International Institute for Advanced Study), 京都 (2003 年 11 月 5 日–7 日).
13. On path integral for the radial Dirac equation, 研究集会「確率過程とその周辺」, 金沢大学サテライト・プラザ (2003 年 12 月 10 日–13 日).

田村 博志 Hiroshi Tamura

1. Point process と自由スカラー場, 研究集会 “第 3 回 FT セミナー”, 岡山大学理学部 (2002 年 12 月 24 日)

高信 敏 Satoshi Takanobu

1. 「2 整数が互いに素になる確率」の確率論的見方 — 大数の強法則とその精密化 —, “九州確率論セミナー”, 九州大学数理学研究員 (2001 年 6 月 8 日)

2. 「2 整数が互いに素になる確率」の確率論的見方 — 数値実験による予想 —, “短期共同研究「確率数値解析における諸問題」”, 京都大学数理解析研究所 (2001 年 7 月)
3. 完全加法的関数の確率拡張に対する極限定理, “九州確率論セミナー”, 九州大学数理学研究員 (2002 年 2 月 15 日)
4. Multidimensional Brownian local times in the Malliavin calculus, 短期共同「確率数値解析に於ける諸問題」(於数理解析研究所) (2003 年 7 月)
5. Malliavin 解析における多次元 Brown 運動の局所時間 — どの一般 Wiener 関数のクラスに属するのか? シンポジウム「確率解析とその周辺」京都大学 (2003 年 9 月)

藤原 大輔 Daisuke Fujiwara

1. An estimate of Kumanogo-Taniguchi type of some integrals with a complex phase, The International Symposium “The Mathematical Legacy of Feynman’s Path Integral Approach: Analysis, Geometry and Probability”, Lisbon/ Portugal (2002 年 6 月 27 日)

田村 英男 Hideo Tamura

1. Magnetic scattering by several point-like fields at large separation, 「学習院大学スペクトル理論セミナー」, 学習院大学理学部数学教室 (2001 年 1 月 20 日)
2. Magnetic scattering by several point-like fields at large separation, Workshop on Spectral Theory and Inverse Problem, 東京都立大学 (2001 年 2 月)
3. Scattering by a chain of magnetic vortices and Aharonov-Bohm effect, 作用素論セミナー, 京都大学数理解析研究所 (2001 年 2 月)
4. Aharonov-Bohm Hamiltonian with spin, 夏の作用素論シンポジウム, 浜名荘 (浜松市) (2001 年 9 月)
5. (with Hiroshi Ito) Scattering by a chain of magnetic field vortices at large separation and Aharonov-Bohm effect, 日本数学科会秋期分科会, 九州大学 (2001 年 10 月)
6. Aharonov-Bohm effect in scattering by a chain of magnetic vortices, 第 13 回「微分方程式と数理解析」, 湯布院ハイッ (2001 年 10 月)
7. Scattering by a chain of magnetic field vortices at large separation and Aharonov-Bohm effect, 「スペクトル・散乱理論とその周辺」, 京都大学数理解析研究所 (2001 年 12 月)
8. Aharonov-Bohm effect in scattering by a chain of magnetic vortices, 第 9 回「超局所解析と古典解析」, ホテル実道湖 (松江市) (2001 年 12 月)
9. 2 次元デルタ型磁場による散乱とアハラノフ・ボーム効果, 第 19 回「九州における偏微分方程式研究集会」, 九州大学 (2002 年 2 月)
10. Self-adjoint extension and norm resolvent convergence for Dirac operators with point-like magnetic fields, Tsukuba Symposium 2002, 筑波大学 (2002 年 2 月)
11. Pauli 作用素の零エネルギーレゾナンスと Dirac 作用素の 2 次元磁場散乱について, 夏の作用素論シンポジウム, 秋田スカイホテル (2002 年 9 月)
12. デルタ型磁場をもつディラック作用素へのノルム レゾルベント収束, 第 14 回「微分方程式と数理解析」, 水上保養所去来荘 (2002 年 10 月)

13. 磁場による散乱とアハラノフ・ボーム効果, 学習院大学スペクトル理論セミナー, 学習院大学理学部 (2003 年 3 月)
14. Scattering of Dirac particles by magnetic field with small support, 作用素論セミナー, 京都大学数理解析研究所 (2003 年 4 月)
15. 指数積公式とシュレディンガー半群の基本解収束, 夏の作用素論セミナー, 宮崎厚生年金会館 (2003 年 9 月)
16. Scattering of Dirac particles by electromagnetic fields with small support in two dimensions, 黒田古希シンポジウム「微分方程式と物理数学」, 東京大学大学院数理科学科 (2003 年 10 月)
17. 指数積公式とシュレディンガー半群の基本解収束, 第 10 回「超局所解析と古典解析」, めかり山荘 (門司市) (2003 年 12 月)

谷島 賢二 Kenji Yajima

1. Smoothing properties of multi-dimensional Schrödinger equations with potentials superquadratic at infinity, The 8-th Workshop on Quantum Mathematics, Taxco, Mexico (2001 年 12 月)
2. Dispersive properties of time periodic Schrödinger equations, Workshop on Mathematical Theory of Quantum Mechanics, University of München, Germany (2002 年 12 月)
3. $L^p - L^q$ -estimates for Schrödinger equation with potentials periodic in time, Semi-classical Meeting, Laboratoire J. Leray, Université de Nantes (2003 年 1 月)
4. On time periodic Schrödinger equations, Mathematical Physics Seminar, ETH-Zürich (2003 年 1 月)
5. 時間周期シュレディンガー方程式について, 名古屋大学微分方程式セミナー (2003 年 5 月)
6. Schrödinger 方程式の基本解, 日本数学会 2004 年会 総合講演, 筑波大 (2004 年 3 月 29 日)

Valentin A. Zagrebnov

1. Gibbs semigroups,
International Conference “Frontier of Non Commutative Analysis and Mathematical Quantum Theory” in the occasion of the 70th birthday of Huzihiro Araki, 福岡 (August 7-11, 2002).

・研究成果

Trotter-Kato 積公式, または, Lie-Trotter-Kato 積公式は, ふつう Hilbert/Banach 空間の強位相で収束するものであったが, Helffer (1994-95) のカツの転送作用素に関する仕事と Rogava (1993) の仕事で breakthrough を与えた. 即ち, 非自明なときにもトロツ

ター・加藤積公式が作用素ノルムでも成り立つ場合があることを知ったことが、本研究「作用素ノルム Trotter-Kato 積公式の更なる展開と経路積分の問題」及びそれまでの研究の動機であった。

この研究は、偏微分方程式論としてのシュレーディンガー作用素論、及び量子力学の経路積分の問題との双方にかかわっている。主に以下の3つのテーマを取り扱った。

- (1) 作用素ノルムでの自己共役 Trotter-Kato 積公式
- (2) 経路積分の問題
- (3) その他の関連する研究

(1) 一瀬は、研究分担者田村英男との共著論文(研究発表(1)学会誌等の一瀬の論文リストの)[3]、及び研究分担者 田村英男、田村博志、海外研究協力者 V. A. Zagrebnov との共著論文(研究発表(1)表学会誌等の一瀬の論文リストの)[4]において次のような作用素ノルム自己共役 Trotter-Kato 積公式を確立した。

A, B を Hilbert 空間上の2つの下に有界な(必ずしも有界はでない)自己共役作用素とする。その定義域を $D[A], D[B]$ とする。作用素和 $C := A + B$ が $D[A] \cap D[B]$ 上で自己共役であるならば、

$$\begin{aligned} \|(e^{-tB/n}e^{-tA/n})^n - e^{-tC}\| &= O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty, \\ \|(e^{-tB/2n}e^{-tA/n}e^{-tB/2n})^n - e^{-tC}\| &= O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

が成り立つ。この収束は t について $[0, \infty)$ の有界閉区間上一様であり、誤差評価 $O(n^{-1})$ は最良である。

この結果は、考えている状況で最良の最終的結果であると考えられる。実際、以前に、一方では、Kac の転送作用素と Schrödinger 半群の差のノルム評価を経た B. Helffer(1994-95)の最初の結果を拡張する一瀬・高信 (Commun. Math. Phys. 1997)による Feynman-Kac-Iô 公式を用いた確率解析的研究、百目鬼・一瀬・田村英男 (J. Math. Soc. Japan 1998)及び一瀬・田村英男 (Asymptotic Analysis 1998)による作用素論的研究、一瀬・高信敏 (Nagoya Math. J. 1998, Electronic J. Prob. 2000)による確率解析的研究の結果を、他方では、Rogava (1993)に始まる抽象的に作用素ノルム自己共役 Trotter・加藤積公式を証明するそれまでの一瀬・田村英男 (Integral Equations Operator Theory 1997, Osaka J. Math. 1998), Neidhardt-Zagrebnov(Integral Equations Operator Theory, Lett. Math. Phys. 1998)等の研究をすべて陽に含み真に拡張するものである。

Schrödinger 作用素 $H = H_0 + V = -\frac{1}{2}\Delta + V(x)$ への典型的な応用では、3次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^3 でポテンシャル $V(x)$ が正の Coulomb ポテンシャルの場合と、また少なくとも下に有界な無限遠で多項式増大する関数ならば、いつでも作用素ノルム自己共役 Trotter・加藤積公式が誤差評価 $O(n^{-1})$ で成り立つことになる。それは、作用素和 $H = H_0 + V$ が、前者の場合は $D[H_0] \cap D[V]$ 上自己共役であることは既知であるが、後者の場合も D. Guibourg [C. R. Acad. Sci. Paris, 316 (1993), Série I Math., 149-152], Z. Shen [Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 45 (1995), 513-546]の研究結果を用いると、その定義域 $D[H_0] \cap D[V]$ 上で自己共役になっていることが分かるからである。

また、我々の結果が最良であることは、作用素和でなく2次形式和の場合、田村博志 (Integral Equations Operator Theory 2000) が、作用素和 $A + B$ が本質的に自己共役で

あっても、自己共役ではないとき、一方の B が他方の A に関して 2 次形式有界でその相対上界が 1 より小さくても、作用素ノルムでの Lie-Trotter-Kato 積公式は必ずしも成立しない反例を与えたことによる。

上で述べた結果に加えて、最近更に新たな成果も得られた。一瀬は、H. Neidhardt 及び V. A. Zagrebnov との最近の共著論文 (J. Functional Analysis 2004) において、上述の作用素ノルム自己共役 Trotter・加藤積公式を、作用素和の場合から 2 次形式和の場合へ拡張した。一方の自己共役作用素 B が他方の自己共役作用素 A に関して 2 次形式の意味でドミネイトされ、これらの作用素の定義域の間に上述の反例を排除するようなある付帯条件を課して、最良の誤差評価と共に証明した。このドミネーション以外は自然な条件と思われるが、このドミネーションを仮定しないで証明できるかどうかは今後の問題であろう。

(2) 藤原大輔 (学習院大理) は、シュレーディンガー方程式の基本解の構成を以前 経路積分法を基に区分的古典軌道を用いて大変良い近似で行った。また時間分割折れ線近似の場合にも良い近似で得る研究を行ったが、更に、最近の熊ノ郷直人による後者の場合の研究成果を取り入れた研究やウィナー空間上の振動積分の漸近解析の研究を行った。

この藤原による研究に関連して、一瀬は、本研究から明らかになった作用素ノルム自己共役 Trotter・加藤積公式の近似の良さから、田村英男との新たな共同研究で、この近似の積分核も同じ誤差評価で収束しているのではないかという問題を検討中である。Trotter・加藤積公式は経路積分的に言えば、時間分割折れ線近似を与えており、この問題は、上述の藤原の (実数時間) シュレーディンガー方程式の時間分割折れ線近似による基本解構成の研究に対応した、虚数時間シュレーディンガー方程式版に当たる。尚、この問題については、(研究発表 (1) 学会誌等の一瀬の論文リストの) 論文 [10], [11] で詳述した [本報告書の資料【2】], pp.27-42, 参照]。

更に、一瀬は B. Jefferies (J. Math. Phys. 2002) との共著論文で、radial Dirac equation に対する Cauchy 問題の基本解の具体的な構成を行い、経路の空間上の可算加法的測度は存在しないことを証明したが、最近、A. Inomata, H. Kleinert 等の物理学者が経路積分の方法で Green 関数を導出するテクニックを用いると、経路の空間上の可算加法的測度を構成し radial Dirac equation の Green 関数の経路積分表示ができるのではないかと考えている。また、研究計画書で述べた constraint のある経路積分も問題も鋭意考察中である。

(3) 田村英男 (岡山大大理) は伊藤宏 (愛媛大) と共に、複数個の δ -型磁場を持つシュレーディンガー作用素に対して、磁場の中心間の距離を引き離れたときのアハラノフ・ボーム効果を散乱振幅の漸近挙動によって確認する興味ある研究も行った。2 つの磁場の場合の以前の仕事から複数個の磁場の場合に拡張した優れた労作である。

谷島賢二 (学習院大理) は、A. Galtbayer, A. Jensen との共同研究で、非相対論的量子電磁力学の Nelson 模型で 2 個より少ない光子を持つ場合に、ハミルトニアン of the 漸近的性質を調べ Cherenkov 放射を示唆する興味ある結果を証明した。また、時間周期的ポテンシャルを持つシュレーディンガー方程式の解の局所時間減衰について研究した。

田村英男教授との色々な局面での数々の討議、及び、Schrödinger 作用素論に関する谷島教授との討議は大変有益であった。

田村博志は, Ch. Gruber, V. A. Zagrebnov と共に, 磁性をもつガスの連続系の統計力学において, 低温高密度における自発磁化の存在はこれまで1成分スピンをもつ場合に証明されていたが, その議論を拡張して2次元空間内の2成分スピンの場合における Kosterlitz-Thouless 転移の存在を証明した. 小栗栖修は, 廣川真男 (岡山大) と共に, 非有界領域上の量子力学の数学的問題として, 2次元磁場中のスピン $1/2$ の荷電粒子の基底状態について研究し論文を書いた. 高信敏は杉田洋 (九大数理) と共に, 「2整数が互いに素になる確率は $\frac{6}{\pi^2}$ である」というディリクレの密度定理について確率論の大数の強法則とみなす観点から研究を行い興味ある結果を得た. 中尾慎太郎は Dirichlet 空間に付随したマルコフ過程の加法的汎関数の確率解析的, 特にエネルギー零の加法的汎関数を中心に研究した.

以上のように, 本研究はその研究計画で述べられたものに沿う然るべき成果を上げてきたとともに, 更に今後の新しい研究の萌芽も得られたように思われる.

情報収集, レビューを受けるためのみならず, それと併せて研究成果の発表などのために, 研究代表者・分担者は国の内外の各地へ出かけたが, 口頭発表にその記録がある. 特に, 一瀬は, 平成13年4月-5月フランスの地中海大学 (マルセイユ大学 II) 招聘教授として, 同大学及び CNRS の物理学センターの V. Zagrebnov 教授 (海外研究協力者) とトロッター積公式について討議するため, 本研究費からの一部サポートで出張した. その際, 同大学の大学院生 Vincent Cachia の作用素ノルムトロッター積公式に関する学位論文審査委員も務めた. ちなみに, 他の審査委員は, W. Amrein (Geneve), F. Bentosela (Marseille), J.-M. Combes (Toulon), B. Davies (King's College, London), B. Helffer (Paris), L. Pastur (Marseille/Paris), Ph. Tchamitchian (Marseille), V. Zagrebnov (Marseille) であった.

その際, カッツの転送作用素に関して最初の仕事をした Bernard Helffer 教授 (Paris 大学) や量子力学の数学的諸問題の研究で著名な Jean-Michel Combes 教授 (Toulon, フランス) と再び親しくお互いの最近の研究について話すことができたことは幸いであった.

また, 一瀬は, 平成14年5月ベルギーのアントワープで開催された第7回国際会議「Path Integrals from Quarks to Galaxies」において講演のため, 本研究費から一部サポートを受けて渡欧した. 1999年ノーベル物理学賞受賞者 G. 't Hooft 教授 (Utrecht) を始め, C. Dewitt-Morette (Austin, Texas), J. R. Klauder (Florida), M. C. Gutzwiller (IBM, New York), L. S. Schulman (Potsdam, New York), A. Inomata (New York), H. Kleinert (Berlin) 各教授等の Feynman 経路積分に関する講演は今後の研究の上で示唆に富むことが多々あった.

平成14年6月ポルトガルリスボンで開催された国際シンポジウム「The Mathematical Legacy of Feynman's Path Integral Approach: Analysis, Geometry and Probability」(代表オーガナイザー: J. Zambrini) において招待講演のため, 本研究費からの一部サポートで渡欧した. この会議に出席された本研究分担者でもある藤原大輔教授 (学習院大学) と関連する問題について親しく討議できたことは大変幸いであった.

平成15年7月末から8月にかけてポルトガルリスボンで開催された第14回国際数理物理学会議 (M \cap Φ) のサテライト Workshop “Mathematical Problems in Quantum Mechanics” (オーガナイザー: P. Exner, P. Freitas, J. P. Solovej) における招待講演と本会議での講演のため, 本研究費からの一部サポートで再渡欧した.

更に研究代表者一瀬は、本研究課題のレビューを受けることとまた共同研究により更なる進展をさせるため、平成14年2月に2週間近く、本研究課題にかかわる研究者である Hagen Neidhardt 博士（ワイエルシュトラス応用解析確率解析研究所，ベルリン，ドイツ）を，また，平成14年7月，8月に2週間近く，本研究の海外研究協力者である Valentin Zagrebnov 教授（地中海大学 [マルセイユ大学 II]，マルセイユ，リュミニ，フランス）を金沢に招いて本研究課題について討議した．Zagrebnov 教授には，折りしも，平成14年8月7日ー11日に期間に福岡で開催された国際会議「非可換解析学と数学的量子論」において，本研究の一部を宣伝紹介する講演「ギブス半群」をしてもらった（同教授の最近の著書 *Topics in the Theory of Gibbs Semigroups*, 2003, においても我々の研究が紹介されている）．Neidhardt 博士, Zagrebnov 教授とは共同研究中の論文の最後の詰めを行った．共著論文は平成16(2004)年の極く初めに J. Functional Analysis 誌に出版された．また，平成14年12月5日ー12日に Pavel Exner 教授（チェコ科学アカデミー核物理学研究所）を金沢に招いて曲線上の量子力学のスペクトルに関する問題や量子ゼノン問題に関する共同研究を行った．この研究の更なる継続のために Exner 教授を平成16年3月3日ー9日に再び金沢に招いた．Exner 教授とは，この数年，量子物理学の諸問題に関する日本・チェコ共同プロジェクトを行っており，Exner 教授がチェコ側の代表者であり，一瀬が日本側の代表者になっている．量子ゼノン問題は Trotter の積公式に関する問題であり，中間的結果を得ているが目下それを鋭意改良中である．

また，関連する量子力学の問題について専門知識の提供を受けるため，平成15年4月荒木不二洋教授（京都大学数理解析研究所名誉教授）を，平成15年5月若山正人教授（九大数理）を金沢に招聘した．

本科学研究費からのこれらのサポートに対して，ここに感謝の意を表したい．

最後に，本研究課題の成果の主な部分とこの先の問題について述べた次の資料【1】【2】【3】を本研究成果報告書の次頁から先に付けておく．

- 【1】 Takashi Ichinose, Hideo Tamura, Hiroshi Tamura and Valentin A. Zagrebnov:
Note on the paper "The norm convergence of the Trotter-Kato product formula with error bound" by Ichinose and Tamura,
 Commun. Math. Phys., **221** (2001), No. 3, 499-510 15-26 頁
- 【2】 Takashi Ichinose: *The Selfadjoint Lie-Trotter-Kato Product Formula in Operator Norm and Time-Sliced Approximation to Imaginary-Time Path Integral,*
 Based on a lecture prepared for
 International Symposium "The Mathematical Legacy of Feynman's Path Integral Approach: Analysis, Geometry and Probabbilty", Lisbon June 25-28, 2002 ... 27-42 頁
- 【3】 Takashi Ichinose: *Recent Results on the Selfadjoint Trotter-Kato Product Formula,*
 To appear in the Proceedings of Workshop on Harmonic Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations, RIMS, Kyoto University, July 7-9, 2003 43-48 頁

【1】は，作用素ノルムに関する Lie-Trotter-Kato の積公式に関する最終的結果につ

いて述べた田村英男, 田村博志, Valentin A. Zagrebnov との共同研究による論文 (研究発表 (1) 学会誌等の一瀬の論文リストの [4]) の別刷である.

【2】は作用素ノルムに関する Lie-Trotter-Kato の積公式に関する本研究成果の要約を述べると共に, 直ぐ次に続く問題として, 本結果が, 虚数時間経路積分の時間分割近似に関する問題において, 一般に生成作用素の半群が積分核をもつときには, その積分核の収束を帰結することにならないか, というスペキュラチブな問題についても論じたものである.

【3】は, 京都大学数理解析学研究所研究集会「調和解析と非線型偏微分方程式」(2003年7月7日-9日)における講演原稿である. 特に, 未解決問題に言及した.